dev : suite de polygones

Leçons : 102, 144, 150, 153
réf : Gourdon 190 + Isenmann et Pecatte 389.

7' **Lemme** : Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $P(X) := \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ 60 190

Alors $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} P(\omega^j)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

dem :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ qui correspond à l'endomorphisme u : $e_1 \mapsto e_n$, $e_i \mapsto e_{i-1}$ $\forall i > 1$

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. J^p correspond donc à l'endomorphisme : $e_i \mapsto e_{i-p}$ si $i > p$, $e_i \mapsto e_{i+n-p}$ si $i \leq p$

donc $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ $\forall p \in [\![1, n-1]\!]$.

On a donc $A = a_1 + a_2 J + \dots + a_n J^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i J^{i-1} = P(J)$.

De plus, $Q(J) \neq 0$ $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$.

donc $\pi_J \geq n$ et comme $J^n = I_n$ on a $\pi_J = X^n - 1$.

on en déduit $\chi_J = (-1)^n (X^n - 1)$ car $\deg(\chi_J) = n$ et $\pi_J \mid \chi_J$ insister 144, 150

$= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$ car les racines du polynôme sont les racines $n^{ème}$ de l'unité.

où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

J a n valeurs propres donc J est diagonalisable et : $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ $Q^{-1}JQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \ddots \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$

insister sur polynôme 144, 150

d'où : $Q^{-1} A Q = Q^{-1} P(J) Q = P(Q^{-1} J Q) = \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$

et $\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$.

IsE 390 8' **thm** : Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers l'isobarycentre de P.

dem :
oral : énoncé par schéma.

On a : $P_0 = {}^t(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ et $P_{k+1} = {}^t\left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}\right)$.

C'est-à-dire $P_{k+1} = M P_k$ où $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Par récurrence : $P_k = M^k P_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

- Donc si $(M^k)_k$ converge, on aura que $(P_k)_k$ converge. Par le lemme, on sait que M est diagonalisable donc on va étudier ses racines.

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{par le lemme}}{=} \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}(1 - \omega^i) - \lambda \right)$$

Par ce qu'on a fait dans le somme.

Les racines de χ_M sont $\frac{1}{2}(1+\omega^j)$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, toutes distinctes donc χ_M est scindé à racines simples et M est diagonalisable :

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{C}) \quad M = P^{-1}\,\mathrm{Diag}\left(1, \dots, \frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right)P$$

$$M^k = P^{-1}\,\mathrm{Diag}\left(1, \dots, \left(\frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right)^k\right)P \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|\frac{1+e^{\frac{2i\pi j}{n}}}{2}\right| = \left|e^{i\frac{\pi j}{n}} \times \frac{e^{-\frac{i\pi j}{n}}+e^{\frac{i\pi j}{n}}}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1 \qquad \text{car } 0 < \frac{\pi j}{n} < \pi$$

donc $\left(\frac{1+\omega^j}{2}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \forall j \in [\![1, n-1]\!]$.

On en déduit que : $M^k \longrightarrow M^\infty$. $(= P^{-1}\,\mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0)P$.

- Ainsi P^k converge vers une limite P^∞ et par passage à la limite dans la formule de récurrence : $P^\infty = MP^\infty$. (continuité de la $\times$ matricielle)

Or $E_M(1) = \mathrm{Vect}({}^t(1, \dots, 1))$: $\to$ dim 1 car v.p. simple. (toutes ≠ ⊕)
$\to {}^t(1, \dots, 1)$ v.p.

Donc $P^\infty = {}^t(\alpha, \dots, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Tous les P^k ont le même barycentre $g_k = g$.

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{(k)} = g_k$$

mod n. — à voir

Par continuité de l'isobarycentre, $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha = \alpha$.

- $(P_k)_k$ converge donc vers l'isobarycentre g de P_0.